www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

SESSION 1990 (Options T et TA)

Mathématiques Epreuve n° 2 (Problème)

Durée : 4 heures

Les candidats sont invités à donner de leurs affirmations des justifications aussi brèves que complètes.
Les parties III et IV sont indépendantes l'une de l'autre; elles utilisent les résultats des parties I et II.

Pour toute suite de nombres réels, $a = (a_n)$, on désigne par S_a la somme de la série entière $\Sigma\, a_n t^n$ lorsque celle-ci a un rayon de convergence non nul.

Si $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ sont des suites de nombres réels et λ un nombre réel, on définit les suites $a+b$, $a*b$ et λa par les relations:

$$a+b = (\alpha_n) \quad \text{avec} \quad \alpha_n = a_n + b_n \quad \text{pour tout } n ;$$

$$a*b = (\beta_n) \quad \text{avec} \quad \beta_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k b_{n-k} \quad \text{pour tout } n ;$$

$$\lambda a = (\gamma_n) \quad \text{avec} \quad \gamma_n = \lambda a_n \quad \text{pour tout } n .$$

On désigne enfin par E l'ensemble des suites $a = (a_n)$ de nombres réels vérifiant la condition suivante:

il existe une constante $M_a > 0$ (dépendant de a) telle que pour tout entier $n \geq 1$ on ait $|a_n| \leq M_a^n$.

I

1°) Donner un exemple d'une suite appartenant à E et d'une suite n'appartenant pas à E.

2°) a) Montrer que si $a \in E$ et $b \in E$, alors $a+b \in E$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $n+1 \leq 2^n$. Que peut-on en conclure pour $a*b$ si $a \in E$ et $b \in E$?

c) En remarquant que pour tout réel λ et pour tout $n \geq 1$ $|\lambda| \leq (1+|\lambda|)^n$, montrer que $\lambda a \in E$ si $a \in E$.

3°) Que peut-on dire du rayon de convergence de $\Sigma\, a_n t^n$ lorsque $a \in E$? Quelle relation existe-t-il entre $S_{a+b}(t)$, $S_a(t)$ et $S_b(t)$? entre $S_{a*b}(t)$, $S_a(t)$ et $S_b(t)$? entre $S_{\lambda a}(t)$ et $s_a(t)$?

II

1°) Montrer qu'il existe une suite unique $\epsilon \in E$ telle que

$$a*\epsilon = \epsilon*a = a$$

pour tout $a \in E$. Préciser la fonction S_ϵ.

2°) Soit $a \in E$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une suite de réels b telle que

$$a*b = b*a = \epsilon \ ;$$

écrire les relations de récurrence qui déterminent b .

3°) On suppose $a_0 = 1$. Montrer que si b est une suite de réels telle que $a*b = b*a = \epsilon$ on a:

$$|b_n| \leqslant (2M_a)^n \quad \text{pour } n \geqslant 1 \ .$$

Que peut-on en conclure pour la suite b ?

4°) Déduire de ce qui précède que la condition de la question 2°) est une condition nécessaire et suffisante pour que $a \in E$ ait, dans E, un inverse pour la loi $*$. Que peut-on dire de $S_b(t)$ si b est l'inverse de a ?

III

Soient f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{e^t - 1}{t} \quad \text{pour } t \neq 0 \ ,$$

et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

1°) Déterminer une suite $a \in E$ telle que $f = S_a$.
Cette suite est-elle unique ?

2°) Montrer qu'il existe une suite $b = (b_n) \in E$ telle que, pour t assez voisin de 0, on ait:

$$(1) \qquad g(t) = \sum_0^\infty b_n t^n \ .$$

Ecrire une relation de récurrence permettant la détermination de cette suite b .
Préciser les valeurs de b_n pour $0 \leqslant n \leqslant 5$.

3°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit la fonction g_x par la relation:

$$g_x(t) = e^{xt} g(t) \ .$$

Montrer qu'il existe une suite de polynômes (B_n) telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout t assez voisin de 0, on ait:

$$(2) \qquad g_x(t) = \sum_0^\infty B_n(x) t^n \ .$$

Expliciter B_n à l'aide de la suite b .
Préciser B_n pour $0 \leqslant n \leqslant 5$.
Quelle relation existe-t-il entre B'_n et B_{n-1} ?

4°) En considérant la fonction $g_{x+1} - g_x$, calculer: $B_n(x+1) - B_n(x)$.

Tournez la page S.V.P.

5°) Pour tout entier $p \geqslant 1$ on pose $\sigma_{n,p} = \sum_{k=0}^{k=p} k^n$.

Déduire de ce qui précède une expression simplifiée de $\sigma_{n,p}$ à l'aide du polynôme B_{n+1} .
Expliciter ce résultat pour $\sigma_{4,p}$ et donner la valeur numérique de $\sigma_{4,10}$.

IV

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par I_n l'ensemble des entiers i , $1 \leqslant i \leqslant n$.
Soient $i \in I_n$ et s une permutation de I_n (une bijection de I_n sur I_n). On dit que i est un point fixe de s si $s(i) = i$. Une permutation qui n'a pas de point fixe s'appelle un dérangement. On se propose de déterminer le nombre d_n des dérangements de I_n .
On prolonge la définition de d_n en posant $d_0 = 1$.
Pour tout entier k , $0 \leqslant k \leqslant n$, on désigne par $q_{n,k}$ le nombre de permutations de I_n ayant exactement k points fixes (on a donc $q_{n,0} = d_n$).

1°) Déterminer les nombres $q_{3,k}$, $0 \leqslant k \leqslant 3$.

2°) Etablir les relations

$$(3) \qquad q_{n,k} = C_n^k \, d_{n-k} \; ;$$

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \, d_{n-k} = n!$$

où C_n^k désigne le coefficient du binôme.

3°) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{d_n}{n!}$. Vérifier que $c = (c_n)$ est un élément de E .
Déterminer la fonction S_c en utilisant les résultats de la question 2°) .

4°) En déduire l'expression de c_n en fonction de n . Calculer la limite: $\omega = \lim c_n$.
Déterminer un majorant de $|c_n - \omega|$ et préciser le signe de $c_n - \omega$.

5°) Déduire de l'expression de c_n une relation de récurrence permettant le calcul de d_n .
En déduire les valeurs de d_9 et de d_{10} .

. . .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail